Université Henri Poincaré , Nancy 1

Licence EEAR Semestre 4- Cours d'algèbre linéaire

Diagonalisation,trigonalisation

Sandrine Marchal

Dans tout ce chapitre, la lettre K désigne l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ ou l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$.

1 Diagonalisation

1.1 Introduction

Soit $A \in M_n(K)$ une matrice carrée de taille n.
On associe à A une application linéaire ϕ_A de $M_{n,1}(K)$ dans $M_{n,1}(K)$, définie par $\phi_A(X) = AX$ (X est un vecteur-colonne de $M_{n,1}(K)$).
La matrice de ϕ_A dans la base canonique de $M_{n,1}(K)$ est A.
Diagonaliser A, c'est trouver une base $\mathcal{B}$ de $M_{n,1}(K)$ telle que la matrice de ϕ_A dans $\mathcal{B}$ soit diagonale.

1.2 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Définition 1 *Soit $A \in M_n(K)$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $P(X) = \det(A - X.I_n)$.*
On note ce polynôme $\chi_A(X)$.

Remarques : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité de taille n.

$X.I_n = \begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X \end{pmatrix}$

Le déterminant de la matrice $A - X.I_n$ est un polynôme en X.

Exemples :

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Calculer $\chi_A(X)$.
On forme la matrice $A - X.I_2$: $A - X.I_2 = \begin{pmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{pmatrix}$.
$\det(A - X.I_2) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$
donc $\chi_A(X) = (X-1)(X+1)$.
2)$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
$B - X.I_3 = \begin{pmatrix} -1-X & 1 & 1 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{pmatrix}$.
$\det(B - X.I_3) = \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 1 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix}$.
On fait $L_1 < -L_1 + L_2 + L_3$:
$\det(B - X.I_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 1-X & 1-X \\ 1 & -1-X & 1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix}$.
Le déterminant est linéaire par rapport à la première ligne, d'où :
$\det(B - X.I_3) = (1-X).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix}$.
On fait $L_3 < -L_3 - L_1$:
$\det(B - X.I_3) = (1-X).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 0 & 0 & -2-X \end{vmatrix}$.
On développe par rapport à la dernière ligne qui contient deux zéros :
$\det(B - X.I_3) = (1-X).(-1)^{3+3}(-2-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix}$.
$\det(B - X.I_3) = (X-1)(X+2)(-1-X-1)$.
$\det(B - X.I_3) = -(X-1)(X+2)^2$.
donc $\chi_B(X) = -(X-1)(X+2)^2$.

1.3 Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Définition 2 *Soit $A \in M_n(K)$.*
Un scalaire $\lambda \in K$ est une valeur propre de A si et seulement si il existe un vecteur-colonne $X \in M_{n,1}(K)$, non nul, tel que $AX = \lambda.X$.
L'ensemble des valeurs propres de A se note Spec(A) (il est encore appelé le spectre de A).

Définition 3 *Soit $A \in M_n(K)$, soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$.*

On appelle vecteur propre de A associé a la valeur propre λ tout vecteur-colonne $X \in M_{n,1}(K)$ non nul vérifiant $AX = \lambda.X$.

Proposition 1 *Soit $A \in M_n(K)$.*
Les valeurs propres de A sont exactement les racines de son polynôme caractéristique χ_A.

Définition 4 *Soit $A \in M_n(K)$, soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$.*
On appelle ordre de multiplicité de λ le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ tel que l'on puisse écrire $\chi_A(X) = (X-\lambda)^m Q(X)$ où $Q(X)$ est un polynôme.

Exemples

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_A(X) = (X-1)(X+1)$. On a donc $\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 1\}$.

2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\chi_B(X) = -(X-1)(X+1)^2$. On a donc $\mathrm{Spec}(B) = \{-1, 1\}$.

1.4 Sous-espaces propres d'une matrice

Définition 5 *Soit $A \in M_n(K)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$.*
La réunion de l'ensemble des vecteurs propres de A pour la valeur propre λ et du vecteur nul est notée $\mathrm{SEP}(A, \lambda)$.
On a $\mathrm{SEP}(A, \lambda) = \{V \in M_{n,1}(K) / AV = \lambda.V\}$

Proposition 2 *Soit $A \in M_n(K)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$.*
$\mathrm{SEP}(A, \lambda)$ *est un sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(K)$.*

Proposition 3 *Soit $A \in M_n(K)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$.*
On note m l'ordre de multiplicité de λ dans $\chi_A(X)$.
Alors $1 \leq \dim(\mathrm{SEP}(A, \lambda)) \leq m$.

Exemples :

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\chi_A(X) = (X-1)(X+1)$. $\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 1\}$.
Déterminer les sous-espaces propres de A.
a) Sous-espace propre associé à la valeur propre -1.
On cherche tous les $V \in M_{2,1}(K)$ tels que $AV = -V$.
On résout l'équation $AV = -V$.

$AV = -V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}$

$AV = -V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \{v_2 = -v_1$

L'équation matricielle $AV = -V$ est équivalente à un système d'1 équation indépendante à 2 inconnues : $\mathrm{SEP}(A, -1)$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension $2 - 1 = 1$ de $M_{2,1}(\mathbb{R})$. On trouve une base de ce sous-espace en donnant une valeur non nulle à v_1 ou v_2 : par exemple $v_1 = 1$ d'où $v_2 = -1$. On a alors $\mathrm{SEP}(A, -1) = \{\lambda. \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} / \lambda \in \mathbb{R}\}$.

b) Sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

On cherche tous les $V \in M_{2,1}(K)$ tels que $AV = V$.

On résout l'équation $AV = V$.

$AV = V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$AV = V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \{v_2 = v_1$

L'équation matricielle $AV = V$ est équivalente à un système d'1 équation indépendante à 2 inconnues : $\mathrm{SEP}(A, 1)$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension $2 - 1 = 1$ de $M_{2,1}(\mathbb{R})$. On trouve une base de ce sous-espace en donnant une valeur non nulle à v_1 ou v_2 : par exemple $v_1 = 1$ d'où $v_2 = 1$. On a alors $\mathrm{SEP}(A, 1) = \{\lambda. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\chi_B(X) = -(X - 1)(X + 2)^2$. $\mathrm{Spec}(B) = \{-2, 1\}$.

Déterminer les sous-espaces propres de B.

a) Sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

On cherche tous les $V \in M_{3,1}(K)$ tels que $BV = V$.

On résout l'équation $BV = V$.

$BV = V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$BV = V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -v_1 + v_2 + v_3 \\ v_1 - v_2 + v_3 \\ v_1 + v_2 - v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 + v_3 = 2v_1 \\ v_1 + v_3 = 2v_2 \\ v_1 + v_2 = 2v_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 \\ v_2 = v_3 \end{cases}$

L'équation matricielle $BV = V$ est équivalente à un système de 2 équations indépendantes à 3 inconnues : $\mathrm{SEP}(B, 1)$ est donc un sous-espace vectoriel

de dimension $3-2=1$ de $M_{3,1}(\mathbb{R})$. On trouve une base de ce sous-espace en donnant une valeur non nulle à v_1 : par exemple $v_1=1$ d'où $v_2=v_3=1$.
On a alors $\mathrm{SEP}(B,1)=\{\lambda.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}/\lambda\in\mathbb{R}\}$.
b) Sous-espace propre associé à la valeur propre -2.
On cherche tous les $V\in M_{3,1}(K)$ tels que $BV=-2V$.
On résout l'équation $BV=-2V$.

$$BV=-2V\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2v_1\\-2v_2\\-2v_3\end{pmatrix}$$

$$BV=-2V\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-v_1+v_2+v_3\\v_1-v_2+v_3\\v_1+v_2-v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2v_1\\-2v_2\\-2v_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\{v_1+v_2+v_3=0$$

L'équation matricielle $BV=-V$ est équivalente à un système de 1 équations indépendantes à 3 inconnues : $\mathrm{SEP}(B,-2)$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension $3-1=2$ de $M_{3,1}(\mathbb{R})$. On trouve une base en cherchant deux vecteurs indépendants vérifiant $v_1+v_2+v_3=0$, par exemple $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$.
On a alors $\mathrm{SEP}(B,-2)=\{\lambda.\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\mu.\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}/\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.

1.5 Diagonalisation d'une matrice

Définition 6 *Soit $A\in M_n(K)$.*
On dit que A est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice inversible $P\in GL_n(K)$ et une matrice diagonale $D\in M_n(K)$ telles que $A=PDP^{-1}$.

Remarque : Diagonaliser A, c'est trouver P inversible et D diagonale telles que $A=PDP^{-1}$.

Proposition 4 *Soit $A\in M_n(K)$.*
A est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}(A)}\dim(\mathrm{SEP}(A,\lambda))=n$$

Proposition 5 *Soit $A\in M_n(K)$.*
A est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $M_{n,1}(K)$ formée de vecteurs propres de A.

Exemples :

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\chi_A(X) = (X-1)(X+1)$

$\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 1\}$

$\mathrm{SEP}(A, -1) = \{\lambda.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} / \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$\mathrm{SEP}(A, 1) = \{\lambda.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$\dim(\mathrm{SEP}(A, -1)) + \dim(\mathrm{SEP}(A, 1)) = 1 + 1 = 2$.

Donc par la propriété ci-dessus, A est diagonalisable.

Pour diagonaliser A, on cherche une base de vecteurs propres. On en obtient une en réunissant des bases de chaque sous-espace propre : par exemple $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ est une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.

La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice D dans cette base de l'application linéaire de $M_{2,1}(K)$ dans $M_{2,1}(K)$ définie par A ($\phi_A(X) = AX$) est diagonale :

Comme $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$) est un vecteur propre pour -1 et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$) un vecteur propre pour 1, on a $\phi_A(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}) = (-1).\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\phi_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = 1.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où la matrice D : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La relation de changement de base s'écrit $A = PDP^{-1}$.

2) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$C - X.I2 = \begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{pmatrix}$.

$\chi_C(X) = \det(C - X.I_2) = (1-X)^2 = (X-1)^2$.

donc $\mathrm{Spec}(C) = \{1\}$.

Sous-espace propre associé à C : on résout l'équation $CX = X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 = x_1 \\ x_2 = x_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow$ $\{x_2 = 0$

L'équation équivaut à une équation indépendante, l'ensemble des solutions est donc de dimension 1 (droite), dont un vecteur directeur est par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\sum_{\lambda\in \mathrm{Spec}(C)} \dim(\mathrm{SEP}(C,\lambda)) = \dim(\mathrm{SEP}(C,1)) = 1 \neq 2.$$

Donc C n'est pas diagonalisable (la somme des dimensions des sous-espaces propres est strictement inférieure à 2).

3) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\chi_B(X) = -(X-1)(X+2)^2$. $\mathrm{Spec}(B) = \{-2, 1\}$.

$\mathrm{SEP}(B,1) = \{\lambda. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$\mathrm{SEP}(B,-2) = \{\lambda. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

$$\sum_{\lambda\in \mathrm{Spec}(B)} \dim(\mathrm{SEP}(B,\lambda)) = \dim(\mathrm{SEP}(B,1)) + \dim(\mathrm{SEP}(B,-2)) = 1+2 = 3.$$

Donc B est diagonalisable.

Une base de vecteurs propres est, par exemple : $\mathcal{B}' = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$.

Dans cette base, la matrice de ϕ_B est $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage de B_0 à $\mathcal{B}'$ est : $P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

La relation de changement de base s'écrit : $B = P'D'P'^{-1}$.

2 Trigonalisation

2.1 Matrices triangulaires

Définition 7 *On appelle matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) une matrice dont tous les éléments situés strictement au-dessous (resp. strictement au-dessus) de la diagonale principale sont nuls.*

Remarque : Une matrice diagonale est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

2.2 Trigonalisation

Définition 8 *On dit qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est trigonalisable si et seulement si il existe une matrice inversible $P \in GL_n(K)$ tel que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.*

Théorème 1 *Toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.*

3 Réduction de Jordan

Définition 9 *On appelle bloc de Jordan une matrice de la forme* $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, *où λ est un réel quelconque. La diagonale principale contient des λ, on trouve des 1 au-dessus de cette diagonale, les autres éléments de la matrice sont nuls. Le bloc de Jordan de taille $n \geq 1$ et dont l'élément sur la diagonale principale est λ est noté $J_n(\lambda)$.*

Exemples de blocs de Jordan : $J_4(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $J_1(8) = (8)$.

Définition 10 *On appelle matrice diagonale par blocs une matrice formée d'une diagonale de matrices carrées, non nécessairement de même taille. Les éléments non situés dans ces matrices sont nuls.*
On note $diag(A_1, A_2, \cdot, A_p)$ la matrice dont les blocs diagonaux sont $A_1, A_2, \cdots, A_p$.

Exemples : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} = diag(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & -5 \end{pmatrix} = diag((1), \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix})$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}((3), \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix})$.

Définition 11 *On appelle matrice de Jordan une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont des blocs de Jordan.*

Définition 12 *Soit $A \in M_n(K)$.*
On appelle réduite de Jordan de A toute matrice de Jordan J telle qu'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $A = PJP^{-1}$.

Théorème 2 (Réduction de Jordan) *Soit $A \in M_n(K)$.*
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres de A.
On note μ_i l'ordre de multiplicité de λ_i dans χ_A.
A admet une réduite de Jordan J et une seule (à l'ordre des blocs près).
Tout bloc de la réduite de Jordan de A est de la forme $J_k(\lambda_i)$ avec $\lambda_i \in \mathrm{Spec}(A)$ et $1 \leq k \leq \mu_i$.
Sur la diagonale principale de la réduite de Jordan, on trouve les valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité : λ_i apparaît μ_i fois.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1)Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2)Donner la réduite de Jordan de A.
1)Il faut déterminer les sous-espaces propres de A.

$$\chi_A(X) = \det(A - X.I_4) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4-X & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2-X & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -X \end{vmatrix}.$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} 4-X & 1 & -2 \\ 1 & 2-X & -1 \\ 2 & 1 & -X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)[(4-X)\begin{vmatrix} 2-X & -1 & 1 & -X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -X \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2-X \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (1-X)[(4-X)(-2X + X^2 + 1) + X - 2 - 2(1 - 4 + 2X)]$
$= (1-X)[-X^3 + 6X^2 - 9X + 4 + X - 2 + 6 - 4X]$
$= (1-X)[-X^3 + 6X^2 - 12X + 8]$
$= (X-1)(X^3 - 6X^2 + 12X - 8)$
2 est racine évidente :
$= (X-1)(X-2)(X^2 - 4X + 4)$
$= (X-1)(X-2)^3$.
Donc $\mathrm{Spec}(A) = \{1, 2\}$.
1 est valeur propre simple, donc $\dim(\mathrm{SEP}(A, 1)) = 1$.
2 est valeur propre triple, donc $\dim(\mathrm{SEP}(A, 2)) \in \{1, 2, 3\}$.
A est diagonalisable si et seulement si $\dim(\mathrm{SEP}(A, 2)) = 3$.

On détermine les sous-espaces propres :

1)Sous-espace propre associé à 1 : $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ \frac{-1}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

On obtient trois équations indépendantes, le sous-espace propre est bien de dimension 1, une base s'obtient en posant par exemple $x_4 = 1$, d'où : $x_3 = 4$, $x_2 = -1$, $x_1 = -1$.

On a donc $\mathrm{SEP}(A, 1) = \{\lambda. \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} / \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1)Sous-espace propre associé à 3 : $AX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

On obtient trois équations indépendantes, le sous-espace propre est donc de dimension 1, une base s'obtient en posant par exemple $x_4 = 1$, d'où : $x_3 = 0$, $x_2 = 1$, $x_1 = 0$.

On a donc $\mathrm{SEP}(A, 2) = \{\lambda. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / \lambda \in \mathbb{R}\}$.

On a$\dim(\mathrm{SEP}(A, 2)) + \dim(\mathrm{SEP}(A, 1)) = 1 + 1 = 2 < 4$, A n'est donc pas

diagonalisable.
2) Réduite de Jordan de A
On regarde quels sont les blocs de Jordan possibles pour la réduite de Jordan de A.
On sait qu'ils sont de la forme $J_k(\lambda)$, où λ est une valeur propre de A, et k un entier compris entre 1 et l'ordre multiplicité m de λ dans χ_A. ($1 \leq k \leq m$).
La valeur propre 1 est d'ordre de multiplicité 1, le seul bloc de Jordan possible est donc $J_1(1) = (1)$.
La valeur propre 2 est d'ordre de multiplicité 3, on a donc trois blocs de Jordan possibles, $J_1(2) = (2)$, $J_2(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,$J_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Sur la diagonale de la réduite de Jordan, on doit trouver les valeurs propres comptées avec multiplicité, on doit donc avoir une fois 1 et trois fois 2.
Les réduites de Jordan possibles sont donc : $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Si J_1 était la réduite de Jordan de A, comme J_1 est diagonale, A serait diagonalisable, ce qui est faux.J_1 n'est donc pas la réduite de Jordan de A.
Si J_2 était la réduite de Jordan de A, on aurait $A = PJ_2P^{-1}$, avec P une matrice inversible. Dans la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ définie par P, la matrice de ϕ_A est J_2, donc $\phi_A(e_2) = 2e_2$ et $\phi_2(e_3) = 2e_3$. On aurait donc deux vecteurs propres pour 2 e_2 et e_3 indépendants. Ce n'est pas possible car $\mathrm{SEP}(A, 2)$ est de dimension 1 : tous les vecteurs de cet espace sont colinéaires.
La réduite de Jordan de A est donc J_3.
Il reste à trouver $P \in GL_n(K)$ tel que $A = PJ_3P^{-1}$.
Si $P \in GL_n(K)$ est telle que $A = PJ_3P^{-1}$, alors si on note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ formée des vecteurs-colonnes de P,par la relation de changement de base la matrice de ϕ_A dans $\mathcal{B}$ est J_3, on a donc $\phi_A(e_1) = e_1$, $\phi_A(e_2) = 2e_2$, $\phi_A(e_3) = 2e_3 + e_2$,$\phi_A(e_4) = 2e_4 + e_3$.
Réciproquement, si on trouve une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ vérifiant les quatre égalités précédentes, et si on note P la matrice de passage de B_0 à $\mathcal{B}$, on aura $A = PJ_3P^{-1}$.
On résout donc les quatre équations $\phi_A(e_1) = e_1$, $\phi_A(e_2) = 2e_2$, $\phi_A(e_3) = 2e_3 + e_2$,$\phi_A(e_4) = 2e_4 + e_3$.
e_1 et e_2 sont donnés par des vecteurs propres pour 1 et 2 : par exemple

$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On résout $Ae_3 = 2e_3 + e_2$: $Ae_3 = 2e_3 + e_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -x_1 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{array} \right.$.

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ \\ x_3 = 1 \end{array} \right.$

Un exemple d'un tel vecteur e_3 est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On résout $Ae_4 = 2e_4 + e_3$: $Ae_4 = 2e_4 + e_3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -x_1 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right.$.

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 = 0 \\ x_2 = x_4 + 1 \\ x_3 = -2 \end{array} \right.$

Un exemple d'un tel vecteur e_4 est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Conclusion : on a $A = PJP^{-1}$, avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.